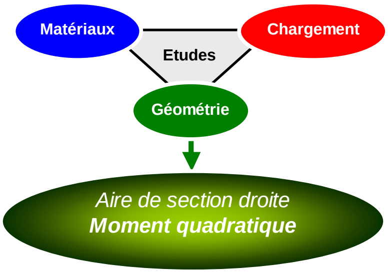
# Moment quadratique, théorème de Huygens

## 1 - PRÉAMBULE

L'analyse des contraintes et des déformations dans un solide fait intervenir deux grandeurs géométriques liées aux sections droites étudiées :

- L'**aire** de la section droite ⇨ Traction – Compression. ⇨ Cisaillement.
- Le **moment quadratique** de la section droite ⇨ Torsion. ⇨ Flexion. ***TRAITÉ DANS CETTE FICHE***




*Le moment quadratique est aussi appelée « moment d'inertie quadratique ».*

## 2 – DÉFINITION GÉNÉRALE

Le moment quadratique d'une section S quantifie la distribution de matière par rapport à :

- Un axe ⇨ $Ix, Iy, Iz$ ⇨ utile pour des études en Flexion.
- Un point ⇨ $I_0$ ⇨ utile pour des études en Torsion.

**DÉFINITIONS FONDAMENTALES**

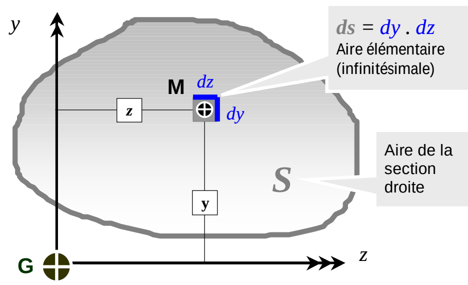
Moment quadratique / axe (G,*y*) : $I_{Gx} = \int_S z^2 \, . \, ds$

Moment quadratique / axe (G,*z*) : $I_{Gz} = \int_S y^2 \, . \, ds$

Moment quadratique polaire / G : $I_0 = I_{Gx} + I_{Gx} = \int_S (y^2 + z^2) \, . \, ds$

**Unité** légale : ($m^4$) usuelle : ($mm^4$) (au regard des ordres de grandeur rencontrés).

Paramétrage pour le calcul du moment quadratique




*Plus la matière est éloignée du point ou de l'axe considéré, plus le moment quadratique est grand, et moins le solide se déformera (toutes choses égales par ailleurs).*

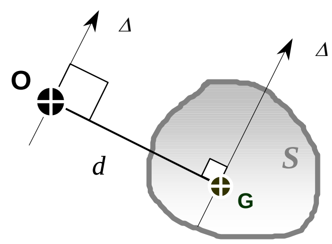
## 3 – THÉOREME DE HUYGENS

Huygens établit le moment quadratique par rapport à un axe (O,*Δ*) à partir du moment quadratique par rapport à l'axe (G,*Δ*), de l'aire *S* concentrée d'une section droite décalée et de la distance **d** séparant (G,*Δ*) et (O,*Δ*) :

Moment quadratique / axe (O,Δ) : $$I_{O\Delta} = I_{G\Delta} + S \; . \; d^2$$

($mm^4$) ($mm^4$) ($mm^2$) ($mm^2$)

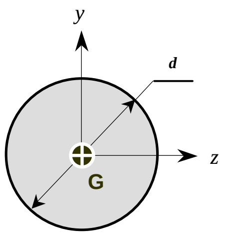
Moment d'inertie d'une section décalée



## 4 – DÉFINITIONS PARTICULIERES

Moments quadratiques pour des sections courantes

### Section circulaire pleine



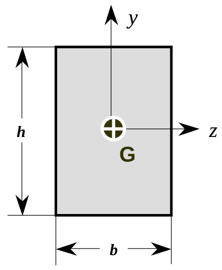

$$I_{Gy} = \frac{\pi}{64} d^4$$

$$\boxed{I_{Gz} = \frac{\pi}{64} d^4}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{32} d^4}$$

Formules les plus courantes à connaître

### Section rectangulaire pleine

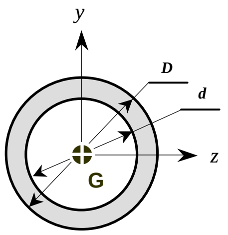



$$I_{Gy} = \frac{1}{12} hb^3$$

$$\boxed{I_{Gz} = \frac{1}{12} bh^3}$$

$$I_0 = \frac{1}{12} bh\,(b^2 + h^2)$$

### Section circulaire creuse

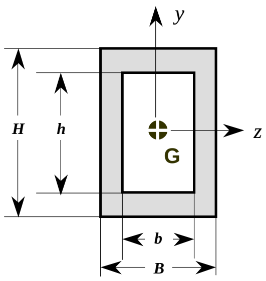



$$I_{Gy} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

$$I_{Gz} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

$$I_0 = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

### Section rectangulaire creuse

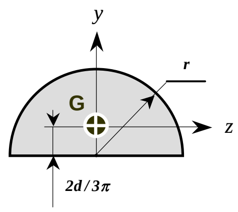



$$I_{Gy} = \frac{1}{12} (HB^3 - hb^3)$$

$$I_{Gz} = \frac{1}{12} (BH^3 - bh^3)$$

$$I_0 = \frac{1}{12} [\, bh\,(b^2 + h^2) + BH\,(B^2 + H^2)\,]$$

### Section demi circulaire

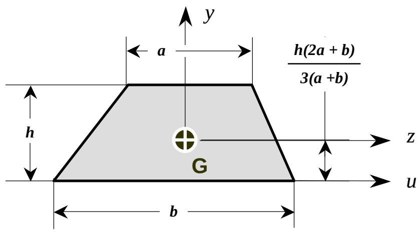



$$I_{Gy} = \frac{\pi}{8} r^4$$

$$I_{Gz} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8\pi}{9}\right) r^4$$

$$I_0 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8\pi}{9}\right) r^4$$

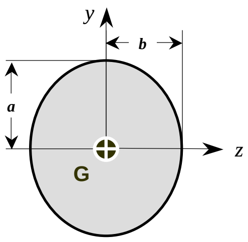
### Section trapézoïdale




$$I_{Gy} = \frac{1}{36}\, h^3 \;\frac{(a^2 + 4ab + b^2)}{(a + b)}$$

$$I_0 = \frac{1}{12}\, h^3\,(3a + b)$$

### Section elliptique

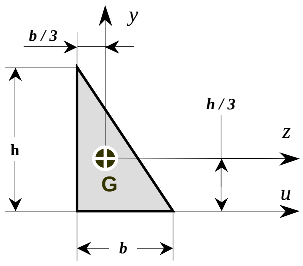



$$I_{Gy} = \frac{\pi}{4} ab^3$$

$$I_{Gz} = \frac{\pi}{4} ba^3$$

$$I_0 = \frac{\pi}{4} ab\,(a^2 + b^2)$$

### Section triangulaire




$$I_{Gy} = \frac{1}{36} hb^3$$

$$I_{Gz} = \frac{1}{36} bh^3$$

$$I_0 = \frac{1}{36} bh\,(b^2 + h^2)$$

$$I_{Gu} = \frac{1}{12} bh^3$$

## Protocole de calculs pour une section complexe :

En l'absence de modeleur permettant d'accéder aux moment quadratique…

❶ Décomposer la section complexe en plusieurs sections simples. Procéder par addition ou soustraction selon les cas.

❷ Positionner les centres de gravité de chaque section simple.
Déterminer les distances les séparant de l'axe considéré passant par le centre de gravité de la section complexe.

❸ Déterminer le moment quadratique de chaque section simple par rapport à l'axe considéré passant par le centre de gravité de chacun d'eux.

❹ Déterminer par le théorème de Huygens, les moments quadratiques de chaque section simple, par rapport à l'axe considéré et passant par le centre de gravité de la section complexe.

❺ Déterminer le moment d'inertie du solide complexe en effectuant la somme et / ou la différence de moments élémentaires selon les choix opérés en ❶.